21-11-18

1. Έστω $\xi \in D(f)'$ (στο $\overline{\mathbb{R}}$) κ' $\lim_{x \to \xi} f(x) > 0 \Rightarrow \exists$ μια περιοχή του ξ τω

$\forall x$ στην περιοχή (εκτός του ξ) να ισχύει $f(x) > 0$

2. Έστω $\xi \in D(f)'$ (στο $\overline{\mathbb{R}}$) κ' $\lim f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Τότε, $\exists$ μια περιοχή του ξ τω η f να είναι φραγμένη σε αυτήν την περιοχή του ξ.

<u>Απόδειξη (2)</u>

Έστω ότι $\xi \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists\ \delta > 0$ τω $\forall x \in ((\xi-\delta, \xi+\delta) \setminus \{\xi\}) \cap D(f)$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - 1 < f(x) < \ell + 1$, $\forall x \in ((\xi-\delta, \xi+\delta) \setminus \{\xi\}) \cap D(f)$.

Έστω ότι $\xi = +\infty$. Για $\varepsilon = 1$, $\exists\ M > 0$ τω $\forall x > M \Leftrightarrow \forall x \in (M, +\infty)$, $\ell - 1 < f(x) < \ell + 1$

<u>Απόδειξη (1)</u>

Έστω ότι $\xi \in \mathbb{R}$. Παίρνω $\varepsilon = \ell > 0 \Rightarrow \exists\ \delta > 0$, τω $\forall x \in ((\xi-\delta, \xi+\delta) \setminus \{\xi\}) \cap D(f)$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \Rightarrow$
$\forall x \in ((\xi-\delta, \xi+\delta) \setminus \{\xi\}) \cap D(f)$ ισχύει $f(x) > 0$

<u>Ακολουθιακός ορισμός ορίου</u>

Έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ $\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \{a_n\} \subseteq D(f) \setminus \{\xi\}$, τω

$a_n \to \xi$, να ισχύει $f(a_n) \to \ell$

<u>Παράδειγμα</u>

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ $\quad (f(x) = x^2)$

$a_n = 1/n$, $b_n = 1 - \frac{n+1}{n}$, $c_n = \frac{1}{n^2}$

$f(a_n) = \frac{1}{n^2} \to 0$, $f(b_n) = \left(1 - \frac{n+1}{n}\right)^2 \longrightarrow 0$

$f(c_n) = \frac{1}{n^4} \to 0$

<u>Απόδειξη</u>

"⇒" Έστω ότι $\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell$ $(\xi, \ell \in \mathbb{R})$. Έστω $\varepsilon > 0$.

Τότε, $\exists\, \delta > 0$ τω $\forall x \in ((\xi - \delta, \xi + \delta) \setminus \{\xi\}) \cap D(\xi)$,
$|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Έστω $\{a_n\} \subseteq D(f) \setminus \{\xi\}$ τω $a_n \to \xi$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τω
$\forall n \geq n_0$, $|a_n - \xi| < \delta \Leftrightarrow a_n \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $a_n \in ((\xi - \delta, \xi + \delta) \setminus \{\xi\}) \cap D(f)$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow f(a_n) \to \ell$

"⇐" Έστω ότι $\forall \{a_n\} \subseteq D(f) \setminus \{\xi\}$, τω $a_n \to \xi$, ισχύει
$f(a_n) \to \ell$

Έστω ότι δεν ισχύει $\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ τω $\forall \delta > 0$, $\exists\, x_\delta \in ((\xi - \delta, \xi + \delta) \setminus \{\xi\}) \cap D(f)$ τω
$|f(x_\delta) - \ell| \geq \varepsilon$

Παίρνω $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ Θέτω $w_n = x_{1/n} \Rightarrow |f(w_n) - \ell| \geq \varepsilon$,
$\forall n \in \mathbb{N}$ κ' $w_n \in ((\xi - 1/n, \xi + 1/n) \setminus \{\xi\}) \cap D(f) \Rightarrow -1/n < w_n - \xi < 1/n$
$\Rightarrow w_n \to \xi$ κ' $f(w_n) \not\to \ell$, <u>ΑΤΟΠΟ</u>
$w_n \in D(f)$
$w_n \neq \xi$

__Ακολουθιακός ορισμός του ορίου για πλευρικά όρια__

Έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$, τω. ξ να είναι δεξιό (αριστερό) σ.σ. του $D(f)$. Τότε, $\lim\limits_{x \to \xi^+} f(x) \left(\lim\limits_{x \to \xi^-} f(x)\right) = l$ ανν $\forall \{a_n\} \subseteq D(f)$ τω $a_n > \xi,\ \forall n \in \mathbb{N}$ ($a_n < \xi,\ \forall n \in \mathbb{N}$), $a_n \to \xi$, $f(a_n) \to l$

__Παράδειγμα__

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$

Έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$. Θδ. το $\lim f(x) \nexists$